

Technischer Bericht Nr. 34

Ein „Dreispiegelverfahren“ zur optisch-photoelektronischen
Messung mechanischer Schwingungen

Dr.-Ing. R. HARTWIG

Technischer Bericht Nr.34

Ein "Dreispiegelverfahren" zur optisch-photoelektro- nischen Messung mechanischer Schwingungen

Zusammenfassung:

In der vorliegenden Arbeit wird ein Dreispiegelmessverfahren angegeben und mathematisch analysiert. Zunächst werden die Abbildungsgesetze für mehrfache Reflektion an drei vorerst beliebig zueinander orientierten Spiegeln formuliert. Als Sonderfall hieraus ergeben sich - bei Verminderung der Freiheitsgrade des Spiegelsystems - die Gesetzmässigkeiten für das spezielle "Dreispiegelsystem", in denen die bereits früher beschriebenen Gesetze für das "Zweispiegelsystem" enthalten sind. Durch die allgemeine Behandlung des Problems kann für das "Dreispiegelverfahren" der Nachweis erbracht werden, dass bei beliebiger Stellung des Fernrohres nur eine spezielle Relativbewegung zwischen Spiegelsystem und Fernrohr einen unbedeutend kleinen Fehler bei der Messung hervorruft, während alle übrigen möglichen Relativbewegungen den Messvorgang nicht beeinflussen.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter
gez. Rüdiger Hartwig
(Dr.-Ing. R.Hartwig)

Der Abteilungsleiter
gez. P. Matthieu
(Prof. Dr. phil. P.Matthieu)

Der Institutsdirektor
gez. L. Cremer
(Prof. Dr.-Ing. L.Cremer)

Inhaltsverzeichnis

- A. Einleitung und Problemstellung
- B. Allgemeine Darstellung der mehrfachen Reflektion von Lichtstrahlen in Matrizenschreibweise
 - 1. Reflektion an einem Spiegel
 - 2. Reflektion an mehreren Spiegeln (hier höchstens drei)
- C. Die Reflektionsgesetze bei besonderer Anordnung des Spiegelsystems
- D. Beweglicher Spiegel nur um eine Achse drehbar
 - 1. Einführung eines neuen Bezugssystems zur Darstellung der Reflektionsrichtungen
 - 2. Das Zweispiegelverfahren als Sonderfall des Dreispiegelverfahrens
 - 3. Vereinfachungen, die sich für die praktische Anwendung des Verfahrens ergeben
 - 4. Der Einfluss der Eigenbewegung des Fernrohres auf den Messvorgang
 - 5. Die Ablesung der Messwerte
 - 6. Der konstruktive Aufbau des Fernrohres

A Einleitung und Problemstellung

Das eigentliche Verfahren, nach dem die Schwingungsmessung hier vorgenommen wird und die praktische Durchführung der Messung sind bereits /1/ beschrieben worden.

Entsprechend der Autokollimationsmethode der Optik wird der aus dem Fernrohr auf ein Spiegelsystem fallende Lichtstrahl von diesem mehrfach reflektiert und in das Fernrohr zurückgeworfen. Aus dem Ort der Abbildung in der Bildebene des Fernrohres kann auf die relative Stellung der Spiegel des Spiegelsystems zueinander geschlossen werden. Bei - durch Schwingungen hervorgerufenen - Bewegungen der Spiegel gegeneinander lassen sich aus der damit verbundenen Bewegung der Abbildungen in der Bildebene Aussagen über die Grösse der zu messenden Schwingungen machen. Durch gleichzeitige photoelektronische Anzeige kann daneben auch die Schwingungsform und die Frequenz der zu messenden Schwingung bestimmt werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, zunächst allgemein die Gesetze zu formulieren, die die Zusammenhänge zwischen der vorerst beliebigen Orientierung von drei Spiegeln zueinander und den Abbildungsorten in der Bildebene des Fernrohres angeben. Aus der allgemeinen Lösung werden dann die Beziehungen hergeleitet und diskutiert, die für die praktische Anwendung des Verfahrens bei der Schwingungsmessung gelten. Das vorerst beliebig orientierte Spiegelsystem muss nämlich für die praktische Anwendung in der Zahl der Freiheitsgrade beschränkt werden, hierbei erweist es sich als vorteilhaft, zwei der Spiegel senkrecht zueinander zu stellen und die Drehachse des bewegten Spiegels in bestimmter Weise festzulegen. Nach Berücksichtigung der zulässigen Vernachlässigungen ergeben sich die Gesetzmässigkeiten, die die Grundlage für die Anwendung dieses Verfahrens bilden. Die bereits beschriebenen Zusammenhänge für das Zweispiegelsystem /1/ sind als Sonderfall in den hier allgemein aufgestellten Gleichungen enthalten.

Abschliessend wird eine Abschätzung darüber vorgenommen, wie stark sich die Eigenbewegung des Fernrohres auf den Messvorgang auswirkt; dabei zeigt sich - wie zu erwarten war - dass der Einfluss so gering ist, dass er praktisch vollkommen vernachlässigt werden darf.

Die Ergebnisse praktischer Untersuchungen mit den abgebildeten Geräten (1) haben die in dieser Arbeit theoretisch ermittelten Gesetze bestätigt.

B Allgemeine Darstellung der mehrfachen Reflektion von Lichtstrahlen in Matritzenschreibweise

Die Reflektion von Lichtstrahlen an einem Mehrspiegelsystem lässt sich in übersichtlicher Weise durch Matritzenrechnung darstellen.

Das Spiegelsystem soll vorerst allgemein aus drei beliebig stehenden Spiegeln L, M, N bestehen, deren Spiegelflächen durch die Normalenvektoren $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ im Raume festgelegt sind.

$\mathbf{l} = (l_x; l_y; l_z)$ u.s.w.

Der einfallende Strahl soll durch den Vektor $\mathbf{u} = (a_x; a_y; a_z)$ beschrieben werden. Der ausfallende Strahl wird mit $\mathbf{v}$ bezeichnet, wobei Indizes die Reihenfolge der Reflektionen an den einzelnen Spiegeln des Mehrspiegelsystems angeben. So stellt z.B.

$\mathbf{v}_{LNM}$ den Lichtstrahl dar, der aus dem Spiegelsystem reflektiert wird, nachdem er die Spiegel in der Reihenfolge L-N-M passiert hat.

B1 Reflektion an einem einzelnen Spiegel

Das Reflektionsgesetz für einen einzelnen Spiegel (hier Spiegel L mit seiner Spiegelnormalen $\mathbf{l}$) lässt sich vektoriell schreiben:

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{l} \quad (1)$$

In Matritzenschreibweise ergibt sich dafür:

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{u} [\mathbf{I} - 2(\mathbf{l}\mathbf{l})] \quad (2)$$

$\mathbf{I}$ ist die Einheitsmatrix, $(\mathbf{l}\mathbf{l})$ ist die Dyade, die sich durch dyadische Multiplikation des Normalenvektors $\mathbf{l}$ mit sich selbst ergibt.

Zur Vereinfachung wird gesetzt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} - 2(\mathbf{l}\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} 1-2l_x^2 & -2l_xl_y & -2l_xl_z \\ -2l_y^2 & 1-2l_y^2 & -2l_y^2 \\ -2l_z^2 & -2l_z^2 & 1-2l_z^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

damit kann geschrieben werden:

$$\vec{b}_L = \mathcal{L} \vec{u} \quad (4)$$

$\mathcal{L}$ ist die Matrix, die die Reflektion des Lichtstrahles $\vec{u}$ an dem Spiegel L beschreibt. Diese Matrix ist symmetrisch, weil beide Summanden symmetrisch sind.

B2 Reflektion an mehreren Spiegeln (hier höchstens drei)

Für jeden einzelnen Spiegel des Systems kann eine Matrix entsprechend (3) gebildet werden.

Spiegel	Normalenvektor	Matrix
L	l	$\mathcal{L} = \mathcal{E} - 2(\vec{l}\vec{l})$
M	m	$\mathcal{M} = \mathcal{E} - 2(\vec{m}\vec{m})$
N	n	$\mathcal{N} = \mathcal{E} - 2(\vec{n}\vec{n})$

(5)

Eine mehrfache Reflektion ist unter Anwendung von (4) und (5) jetzt darstellbar dadurch, dass die Matrizen in der Reihenfolge der Reflektionen in dem Spiegelsystem miteinander multipliziert werden.

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \vec{b}_{LM} &= \mathcal{L} \mathcal{M} \vec{u} \\ \text{oder } \vec{b}_{MLN} &= \mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{N} \vec{u} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Reihenfolge der Multiplikation - sie entspricht der Reihenfolge des Passierens der einzelnen Spiegel - ist genau zu beachten,

Die Produkte aus den einzelnen Matrizen, die gerade betrachtet werden (eine, zwei oder drei Spiegelungen), sollen als Reflektionsmatrizen bezeichnet und mit Indizes versehen werden, die die Reihenfolge der Reflektionen an den einzelnen Spiegeln angeben.

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \mathcal{R}_{LM} &= \mathcal{L} \mathcal{M} \\ \text{oder } \mathcal{R}_{MLN} &= \mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{N} \end{aligned} \quad (7)$$

Damit lässt sich (6) einfacher schreiben:

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \vec{b}_{LM} &= \vec{u} \mathcal{R}_{LM} \\ \text{oder } \vec{b}_{MLN} &= \vec{u} \mathcal{R}_{MLN} \end{aligned} \quad (8)$$

Man erkennt an den Darstellungen (5) und (6), dass es bei Spiegelung an einem einzelnen Spiegel (5) nur einen reflektierten Strahl - besser gesagt, nur eine Reflektionsrichtung - geben kann, weil die Reflektion durch eine einzelne symmetrische Matrix

beschrieben wird. Bei Reflektion an zwei Spiegeln gibt es im allgemeinen zwei verschiedene Reflektionsrichtungen, weil die Reihenfolge der Matrizenmultiplikation nicht vertauschbar ist und durch die mögliche einmalige Vertauschung zwei verschiedene Werte annimmt. Bei Reflektion an drei Spiegeln ergibt sich aus dem gleichen Grunde im allgemeinen Falle eine Reflektion in sechs verschiedenen Richtungen.

Für den allgemeinen Fall der Reflektion an n Spiegeln wäre die Zahl der Refl.-Matrizen = $n!$

Die Anzahl der jeweils möglichen Reflektionsmatrizen ist natürlich mit der Anzahl der vorhandenen Reflektionsrichtungen - kurz gesagt der Anzahl der Lichtstrahlen - identisch.

C Die Reflektionsgesetze bei besonderer Anordnung des Spiegelsystems

Das Spiegelsystem soll nun so angeordnet werden, dass zwei der Spiegel (L und M) einen rechten Winkel miteinander bilden, während der dritte Spiegel (N) in Bezug auf die beiden anderen beliebig orientiert ist. (Abb. 1)

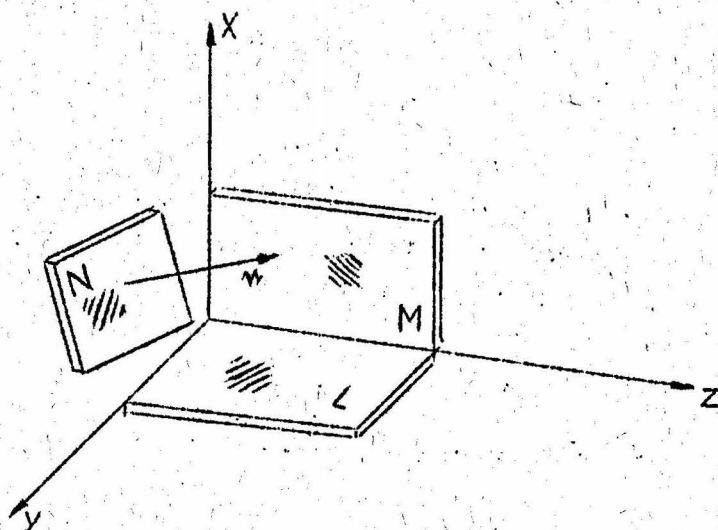


Abb.1

Zwei der Normalenvektoren stehen senkrecht aufeinander. Wenn man das ganze Spiegelsystem an dem orthogonalen x, y, z -System orientiert, lassen sich die Normalenvektoren wie folgt schreiben:

$$\vec{l} = \{1, 0, 0\} \quad \vec{m} = \{0, 1, 0\} \quad \vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\} \quad (9)$$

Entsprechend (5) gehen die Abbildungsmatrizen dann in folgende einfache Form über:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} (1 - 2n_x n_x) & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_y n_x & (1 - 2n_y n_y) & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & (1 - 2n_z n_z) \end{pmatrix}$$

Für diese Anordnung der Spiegel werden die Abbildungsmatrizen der beiden senkrecht zueinander stehenden Spiegel L und M zu Diagonalmatrizen mit den Beträgen eins der Diagonalkomponenten. D.h. die gesamte Reflektionsmatrix wird in jedem Falle die gleichen Komponentenbeträge - nämlich die Beträge der Abbildungsmatrix des Spiegels N - haben. Es werden sich durch die Multiplikation mit den Diagonalmatrizen in verschiedener Reihenfolge nur die Vorzeichen einzelner Komponenten ändern.

Die im allgemeinen sechs möglichen Reflektionsmatrizen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{LMN} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathcal{N}) \\ \mathcal{R}_{MLN} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathcal{N}) \\ \mathcal{R}_{NLM} &= (\mathcal{N}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_{NML} &= (\mathcal{N}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_{LNM} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathcal{N}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_{MLN} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathcal{N}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Aus (11) ist zu ersehen, dass - wegen der Vertauschbarkeit von Diagonalmatrizen - folgende Identitäten bestehen:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{LMN} &= \mathcal{R}_{MLN} \\ \mathcal{R}_{NLM} &= \mathcal{R}_{NML} \end{aligned} \quad (12)$$

Aus (12) ist zu erkennen, dass durch die Senkrechtstellung von zweien der drei Spiegel (L und M), die Anzahl der reflektierten Strahlen von sechs (im allg.Falle) auf vier reduziert wird.

Bezüglich der Reihenfolge des Passierens der einzelnen Spiegel heisst das, dass die Strahlen, die den Spiegel N (also den beliebig orientierten Spiegel) an erster Stelle treffen, parallel zueinander reflektiert werden. Das gleiche gilt für die Strahlen untereinander, die den Spiegel N an letzter Stelle treffen. Für diese beiden Möglichkeiten ist demnach die Reihenfolge des Passierens der Spiegel L und M belanglos.

Statt der im allgemeinen sechs möglichen Richtungen existieren jetzt also nur noch vier. Diese sollen abkürzend mit römischen Zahlen bezeichnet werden:

- I. Spiegel N an erster Stelle, L u.M beliebig
 - II. Spiegel N an letzter Stelle, L u.M beliebig
 - III. Spiegel N an zweiter Stelle, L an erster Stelle
 - IV. Spiegel N an zweiter Stelle, M an erster Stelle
- (13)

Mit den gleichen römischen Zahlen als Indizes sollen von nun ab auch die Reflektionsmatrizen und die reflektierten Strahlen versehen werden.

Es zeigt sich ferner, dass je zwei der vier Reflektionsmatrizen durch Transposition ineinander übergehen.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I &= \overline{\mathcal{R}}_{II} \\ \mathcal{R}_{III} &= \overline{\mathcal{R}}_{IV} \end{aligned} \quad (14)$$

Es brauchen demnach nur noch zwei Reflektionsmatrizen und ihre transponierten Matrizen benutzt zu werden, um alle Möglichkeiten zu erfassen.

Diese beiden Matrizen sind:

$$\mathcal{R}_I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -n_x n_x & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_y n_x & -n_y n_y & -n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z n_z \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{R}_{III} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -n_x n_x & n_x n_y & -n_x n_z \\ n_y n_x & -n_y n_y & n_y n_z \\ n_z n_x & -n_z n_y & n_z n_z \end{pmatrix} \quad (15)$$

Damit ergeben sich die vier möglichen reflektierten Strahlen entsprechend (13) und (8) zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= u \mathcal{R}_I \\ \mathcal{L}_{II} &= u \overline{\mathcal{R}}_I \\ \mathcal{L}_{III} &= u \mathcal{R}_{III} \\ \mathcal{L}_{IV} &= u \overline{\mathcal{R}}_{III} \end{aligned} \quad (16)$$

Diese vier möglichen aus dem Spiegelsystem reflektierten Strahlen sollen im folgenden - nach eindeutiger Festlegung der Drehachse des beweglichen Spiegels N - auf ihre Zusammenhänge hin untersucht werden.

D Beweglicher Spiegel nur um x-Achse drehbar

Den bisherigen Ausführungen liegt zu Grunde, dass der Spiegel N beliebig orientiert ist gegenüber den beiden anderen, senkrecht aufeinanderstehenden Spiegeln L und M. Der Spiegel N soll jetzt so in dem Spiegelsystem angeordnet werden, dass er nur eine Drehung um die x-Achse ausführen kann, wobei ausserdem die x-Achse selbst in der Spiegelebene liegt. (Abb.2)

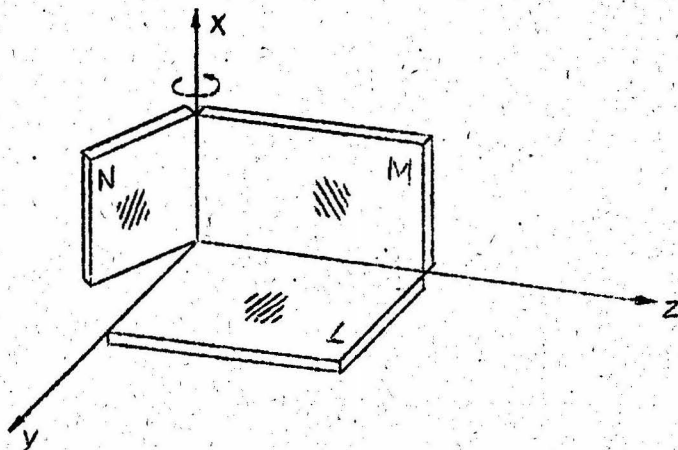


Abb.2

Die Spiegelnormale hat dadurch keine Komponente in Richtung der x-Achse. Es ist demnach:

$$\vec{n} = \{ 0; n_y; n_z \}$$

Dadurch vereinfachen sich die allgemeinen Reflektionsmatrizen (15) zu

$$\mathcal{R}_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_y n_y & -n_y n_z \\ 0 & n_z n_y & n_z n_z \end{pmatrix}$$

Unter Berücksichtigung von $n_y^2 + n_z^2 = 1$ kann geschrieben werden:

$$\mathcal{R}_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2n_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_z \\ 0 & -n_z & n_y \end{pmatrix} \quad (17a)$$

Analog ergibt sich für die andere Reflektionsmatrix

$$\mathcal{R}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2n_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & -n_z \\ 0 & n_z & n_y \end{pmatrix} \quad (17b)$$

Aus (17) ist zu ersehen, dass für diesen Sonderfall ($n_x = 0$) gilt:

$$\mathcal{R}_A = \overline{\mathcal{R}}_B \quad (18)$$

Da die Beziehung (14) allgemein gilt, braucht wegen (18) jetzt nur noch eine Reflektionsmatrix betrachtet zu werden. Diese Matrix beschreibt zusammen mit ihrer transponierten Matrix zwei Lichtstrahlen. Das bedeutet, dass für diese Anordnung des Spiegels ($n_x = 0$) in jeder beliebigen Stellung ^{der Spiegel} je drei (der sechs im allgemeinen Falle möglichen) Strahlen zusammenfallen. Es entstehen also zwei Bilder, die jeweils drei übereinanderliegende, kongruente Abbildungen enthalten. Die Strahlen, die diese beiden Bilder erzeugen, sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= u \mathcal{R}_A \\ \mathcal{L}_B &= u \overline{\mathcal{R}}_A \end{aligned} \quad (19)$$

(17)

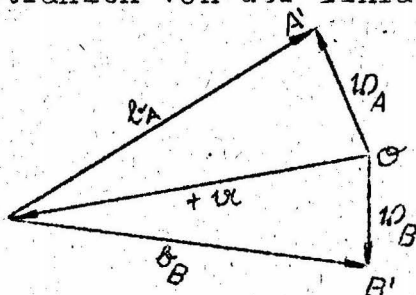
Die Matrizen enthalten je einen Summanden, der die Spiegelung des einfallenden Lichtstrahles an einen Punkt darstellt (Umkehr des einfallenden Lichtstrahles). Dieser Anteil ent-

spricht der Reflektion an einem Tripelspiegel (alle Spiegel senkrecht zueinander). Der zweite Summand gibt die jeweilige Abweichung von der Strahlenumkehr an.

Vektoriell geschrieben ergibt sich nach (17) und (19):

$$\begin{aligned} \vec{b}_A &= -\vec{u} + \vec{w}_A \\ \vec{b}_B &= -\vec{u} + \vec{w}_B \end{aligned} \quad (20)$$

Die Vektoren $\vec{w}_A$ und $\vec{w}_B$ beschreiben die Abweichungen der reflektierten Strahlen von der Einfallsrichtung.



Die Vektoren sind
nicht komplanar

Abb. 3

Da die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{b}_A$, $\vec{b}_B$ Einheitsvektoren sind, müssen die Endpunkte der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{b}_A$, $\vec{b}_B$ auf einer Einheitskugel liegen, deren Mittelpunkt im gemeinsamen Ursprungspunkt der Vektoren liegt.

Der Ort der Abbildungen in der Bildebene des Fernrohres - in dem sich auch die Lichtquelle (Lichtmarken) befindet - wird durch die Abbildungsvektoren $\vec{w}_A$, $\vec{w}_B$ bestimmt. Die Lichtquelle und die Abbildungen liegen in der gleichen Ebene. Dementsprechend bedeutet der erste Summand (die Strahlumkehr) eine Abbildung in der Lichtquelle selbst, während die beiden anderen Summanden die jeweiligen Verschiebungen der Abbildungen bezüglich der Lichtquelle bedeuten.

Die Verschiebungsvektoren $\vec{w}_A$, $\vec{w}_B$ lassen sich in je zwei Anteile zerlegen, einen symmetrischen und einen asymmetrischen. Der symmetrische Anteil ist in beiden Vektoren gleichzeitig enthalten, während die asymmetrischen Anteile sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Der gemeinsame symmetrische Anteil soll mit $\vec{v}$ und die asymmetrischen Anteile sollen mit $\vec{w}_A$ und $\vec{w}_B$ bezeichnet werden.

Es gilt demnach:

$$\begin{aligned} \vec{b}_A &= -\vec{u} + \vec{\sigma} + n\vec{0}_A \\ \vec{b}_B &= -\vec{u} + \vec{\sigma} + n\vec{0}_B \end{aligned} \quad (21)$$

Nach (20) und (17) kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= u \cdot 2n_y^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ n\vec{0}_A = -n\vec{0}_B &= u \cdot 2n_y n_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Eine räumliche Darstellung der Vektoren zeigt die Abb. 4.

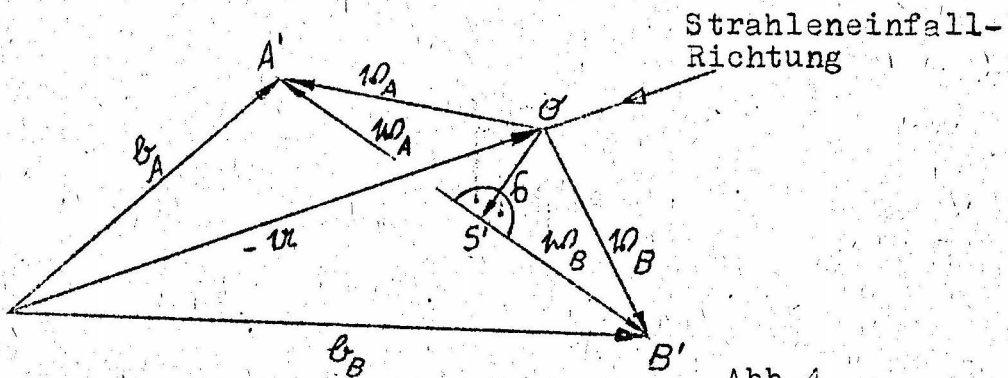


Abb. 4

Die Komponenten der einzelnen Vektoren lassen sich durch Ausmultiplizieren des Vektors $\vec{u}$ mit den entsprechenden Matrizen ermitteln. Man erhält so

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= 2n_y^2 \{0; a_y; a_z\} \\ n\vec{0}_A = -n\vec{0}_B &= 2n_y n_z \{0; -a_z; a_y\} \end{aligned} \quad (23)$$

Aus (23) sind folgende Beziehungen zu erkennen:

1. Die Vektoren $n\vec{0}_A$ und $n\vec{0}_B$ sind entgegengesetzt gerichtet und gleich gross.

$$|w_0|_A = |w_0|_B = 2n_y n_z \sqrt{a_y^2 + a_z^2}$$

$$\text{oder } |w_0|_A = |w_0|_B = 2n_y n_z \sqrt{1 - a_x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } n_y &= \cos(\eta_j) \\ n_z &= \cos(\eta_k) = \sin(\eta_j) \\ a_x &= \cos(\varpi_i) \end{aligned} \quad (24)$$

kann geschrieben werden:

$$|w_0|_A = |w_0|_B = \sin 2(\eta_j) \sin(\varpi_i)$$

2. Die Vektoren w_A und w_B stehen gleichzeitig senkrecht auf dem Vektor u (Einfallsrichtung) und dem Vektor δ (dem gemeinsamen Teil des Verschiebungsvektors).

3. Der Betrag des Vektors δ ist

$$|\delta| = 2n_y^2 \sqrt{a_y^2 + a_z^2} \quad (25)$$

oder

$$|\delta| = 2 \cos^2(\eta_j) \sin(\varpi_i) \quad (26)$$

4. Der cos des Winkels, den die Vektoren u und δ miteinander bilden, ist

$$\begin{aligned} \cos(\varpi\delta) &= \frac{u\delta}{|\delta|} \\ \cos(\varpi\delta) &= \frac{2n_y^2(a_y^2 + a_z^2)}{2n_y^2 \sqrt{a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos(\varpi\delta) &= \sin(\varpi_i) \end{aligned} \quad (27)$$

5. Der tg des Winkels, den die Vektoren w_A bzw. w_B und δ miteinander bilden, ist (w_0 und δ stehen senkrecht aufeinander)

$$\begin{aligned} \text{tg}(w\delta) &= \frac{|w_0|}{|\delta|} = \frac{n_z}{n_y} \\ \text{tg}(w\delta) &= \text{tg}(\eta_j) = \text{tg } \varphi \end{aligned} \quad (28)$$

Diese Beziehung ist von grundlegender Bedeutung für diesen Fragenkreis. Sie besagt, dass zu jeder Zeit und in jeder möglichen Bestrahlungsrichtung der bei A' (bzw. B') liegende Winkel im Dreieck OA'S' (bzw. OB'S') der Strahlenvektoren gleich gross ist dem Verdrehwinkel φ , um den der bewegliche Spiegel im Spie-

gelsystem von der Tripelspiegelanordnung (alle drei Spiegel zueinander senkrecht) abweicht. S. Abbn. 5 und 6.

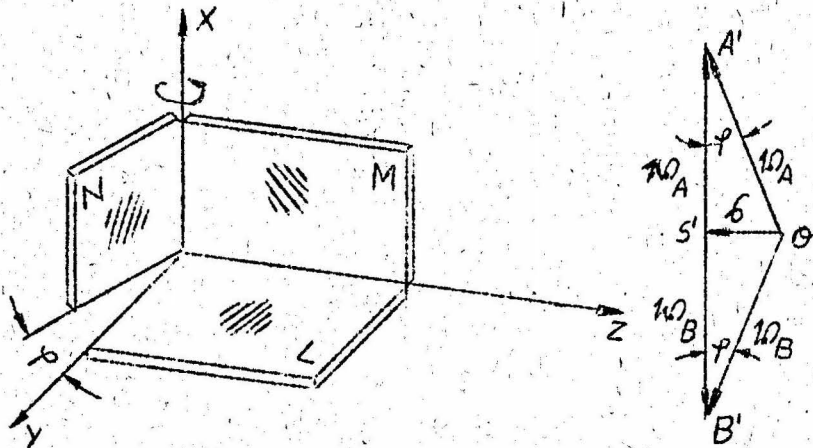


Abb. 5

D1 Einführung eines neuen Bezugssystems zur Darstellung der Reflektionsrichtungen

Bisher wurden alle vektoriellen Betrachtungen in dem am Spiegelsystem orientierten xyz-System angestellt, So wurde die Bestrahlungsrichtung und ebenfalls die Reflektionsrichtung in diesen Koordinaten angegeben.

Es wird jetzt ein orthogonales $\{\eta\}$ -System eingeführt, welches an dem Fernrohr orientiert ist. Die Einheitsvektoren dieses Systems sind ρ, η, κ . Der Ursprungspunkt liegt in der Fernrohrachse an der Stelle der Lichtquelle, wobei der Vektor ρ identisch ist mit dem bisher schon verwendeten Vektor u , der in der Fernrohrachse liegend auf das Spiegelsystem gerichtet ist. Die beiden anderen Grundvektoren liegen in der zur Fernrohrachse senkrechten Ebene, in der sich auch die Lichtquelle befindet (Bildebene!). Die Orientierung dieser beiden Einheitsvektoren wird so festgelegt, dass der Vektor η parallel zu dem Vektor w_A liegt und der Vektor κ senkrecht dazu steht derart, dass alle drei Vektoren ein Rechtssystem miteinander bilden.

Diesen Forderungen entsprechend ergeben sich für die Einheitsvektoren folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\rho &= u = \{a_x; a_y; a_z\} \\ \eta &= \frac{1}{A} \{0; a_z; -a_y\} \\ \kappa &= \frac{1}{A} \{-A^2; a_x a_y; a_x a_z\}\end{aligned}\quad (29)$$

hierbei bedeutet

$$A = \sqrt{a_y^2 + a_z^2} \quad (30)$$

Die Transformation der Vektoren aus ^{dem} einen in das andere System kann durch Multiplikation mit der Transformationsmatrix γ vorgenommen werden.

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_x & 0 & -\frac{A^2}{A} \\ a_y & \frac{a_z}{A} & \frac{a_x a_y}{A} \\ a_z & -\frac{a_y}{A} & \frac{a_x a_z}{A} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Vektoren, deren Komponenten im $\{\gamma\}$ -System angegeben sind, werden mit einem darüberliegenden Querstrich bezeichnet. Vektoren im xyz-System bleiben weiterhin ohne besondere Kennzeichnung. (32)

Demnach ist für die Anwendung der Transformationsmatrix (31) die folgende (am Beispiel des Vektors δ gezeigte) Vorschrift für die Reihenfolge der Multiplikation zu beachten:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \delta \gamma \\ \delta &= \gamma \bar{\delta} \end{aligned} \quad (33)$$

Die Transformation der Vektoren in das $\{\gamma\}$ -System ergibt aus (23):

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= 2n_y^2 A \left\{ A; 0; a_x \right\} \\ \bar{w}_A &= -\bar{w}_B = 2n_y n_z A \left\{ 0; 1; 0 \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Die Addition der Vektoren ist gegenüber der Transformation invariant, es gilt also entsprechend (20) und (21) auch hier:

$$\begin{aligned} \bar{w}_A &= \bar{\delta} + \bar{w}_A \\ \bar{w}_B &= \bar{\delta} + \bar{w}_B \end{aligned} \quad (35)$$

Die Beträge der Vektoren sind ebenfalls invariant, so dass diese direkt aus den früheren Ergebnissen übernommen werden können. Aus (26) ergibt sich:

$$|\bar{\delta}| = 2n_y^2 A \quad (36)$$

$$\text{Aus (24) ergibt sich: } |\bar{w}_A| = |\bar{w}_B| = 2n_y n_z A \quad (37)$$

Für die Gesamtverschiebung ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$n_x^2 + n_z^2 = 1$$

und wegen der Orthogonalität von $\bar{\delta}$ und $\bar{w}_A$ bzw. $\bar{w}_B$:

Zusammenstellung für $n_x = 0$

Benennung	x - y - z - System		$\xi - \eta - \mathcal{J}$ - System		
	vollständig		für $\varphi \approx 1$		
	Vektordarstellung	Betrag	Vektordarstellung	Vektordarstellung	Betrag
Spiegelnormale Spiegel L Spiegel M Spiegel N	$\ell = \{1; 0; 0\}$ $m = \{0; 1; 0\}$ $n = \{0; n_y; n_z\}$	1 1 1		$\varphi \ll 1$ $n_y \approx \varphi \quad n_z \approx 1$	
Einfallender Strahl	$u = \{a_x; a_y; a_z\}$	1	$\bar{u} = \{1; 0; 0\}$	$u = \{1; 0; 0\}$	
Sym. Anteil des Versch.-Vekt.	$\mathcal{G} = 2n_y^2 \{0; a_y; a_z\}$	$2n_y^2 A$	$\bar{\mathcal{G}} = 2n_y^2 A \{A; 0; a_x\}$	$\bar{\mathcal{G}} \approx 0$	$ \bar{\mathcal{G}} \approx 0$
Antimetr. Anteil des Versch.-Vekt.	$\mathcal{W}_{A,B} = 2n_y n_z \{0; a_z; a_y\}$	$2n_y n_z A$	$\bar{\mathcal{W}}_{A,B} = \pm 2n_y n_z A \{0; 1; 0\}$	$\bar{\mathcal{W}}_{A,B} = 2\varphi A \{0; 1; 0\}$	$ \bar{\mathcal{W}}_{A,B} = 2\varphi A$
Ausfallender Strahl	$\mathcal{U}_{A,B} = -u + \mathcal{W}_{A,B}$ $\mathcal{U}_{A,B} = -u + \mathcal{G} + \mathcal{W}_{A,B}$		$\bar{\mathcal{U}}_{A,B} = -\bar{u} + \bar{\mathcal{W}}_{A,B}$ $\bar{\mathcal{U}}_{A,B} = -\bar{u} + \bar{\mathcal{G}} + \bar{\mathcal{W}}_{A,B}$	$\bar{\mathcal{W}}_{A,B} \approx \bar{\mathcal{W}}_{A,B}$ $\bar{\mathcal{U}}_{A,B} \approx -\bar{u} + \bar{\mathcal{W}}_{A,B}$	
Allgemeine Abkürzungen	$A = \sqrt{a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1 - a_x^2}; \quad n_y = \cos(\angle j) = \sin \varphi$ $n_z = \cos(\angle k) = \cos \varphi$				

- 14 -

$$|\vec{r}_A| = |\vec{r}_B| = 2n_y A \quad (38)$$

Damit sind alle Vektoren in beiden Bezugssystemen bekannt. In Abb. 6 ist eine prinzipielle Darstellung aller Vektoren im Zusammenhang angegeben.

D2 Die Zweispiegelmethode als Sonderfall der Dreispiegelmethode

Ein wichtiger Sonderfall ergibt sich aus den allgemeinen Ergebnissen dadurch, dass der in das Spiegelsystem einfallende Strahl in der z-y-Ebene liegt. Seine x-Komponente verschwindet und es sind dann nur noch zwei Spiegel (M und N) an der Reflektion beteiligt. Aus dem Dreispiegelsystem wird ein Zweispiegelsystem, alle reflektierten Strahlen - die Vektoren und deren Komponenten - liegen ebenfalls in der z-y-Ebene.

Die Darstellung der Vektoren für diesen Sonderfall wird sehr einfach. Mit $a_x = 0$ wird

$$\sqrt{a_x^2 + a_z^2} = 1 \quad (39)$$

bzw. (s. Abb. 8)

$$\sin(\vartheta) = \sin \alpha = 1$$

Damit ergibt sich aus (24):

$$|\vec{r}_A| = |\vec{r}_B| = \sin 2(nj) \quad (40)$$

Aus (26) erhält man:

$$|\vec{r}| = 2 \cos^2(nj) \quad (41)$$

Nach (27) ergibt sich:

$$\cos(\vartheta) = 1$$

Man erkennt, dass für diesen Sonderfall alle Bestimmungsgrößen von der Bestrahlungsrichtung unabhängig sind, dass also die Orte der Abbildungen ausschliesslich von der Stellung der (-in diesem Falle zwei- Spiegel abhängen.

Die sich aus diesem Sonderfall ergebenden Schlussfolgerungen sind ausführlich bereits früher [1] erörtert.

D3 Vereinfachungen, die sich für die praktische Anwendung des Verfahrens ergeben

Die Ruhelage des Spiegelsystems muss derart sein, dass die Normale des bewegten Spiegels annähernd senkrecht zu den Normalen der beiden anderen Spiegel steht; d.h. die Normale des bewegten Spiegels (N) bildet mit der Spiegelebene des Spiegels M einen sehr kleinen Winkel (ca. 1 Grad). Es kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} n_y &= \cos(n_j) = \sin(n_i) = \sin \gamma \approx \gamma \\ n_z &= \cos(n_i) \approx 1 \end{aligned} \quad (42)$$

Damit vereinfachen sich die allgemeinen exakten Lösungen. Man erhält aus (24):

$$|\vec{w}_A| = |\vec{w}_B| = 2\gamma \sqrt{a_y^2 + a_z^2} = 2\gamma A \quad (43)$$

Aus (26) ergibt sich:

$$|\vec{\sigma}| = 2\gamma^2 \sqrt{a_y^2 + a_z^2} = 2\gamma^2 A \quad (44)$$

Wegen $\gamma \ll 1$ ist demnach

$$|\vec{\sigma}| \ll |\vec{w}_A| = |\vec{w}_B| \quad (45)$$

und nach (20) und (21)

$$\vec{w}_A \approx \vec{w}_A \quad \text{bzw} \quad \vec{w}_B \approx \vec{w}_B \quad (46)$$

Aus Abb.6 geht die vereinfachte, praktisch gültige Darstellung der Reflektionsvektoren dadurch hervor, dass die Ebenen E_1 und E_2 zusammenfallen, der Vektor $\vec{\sigma}$ zu null wird und die entsprechenden Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{w}$ identisch werden. Nach (30) und (31) gilt somit:

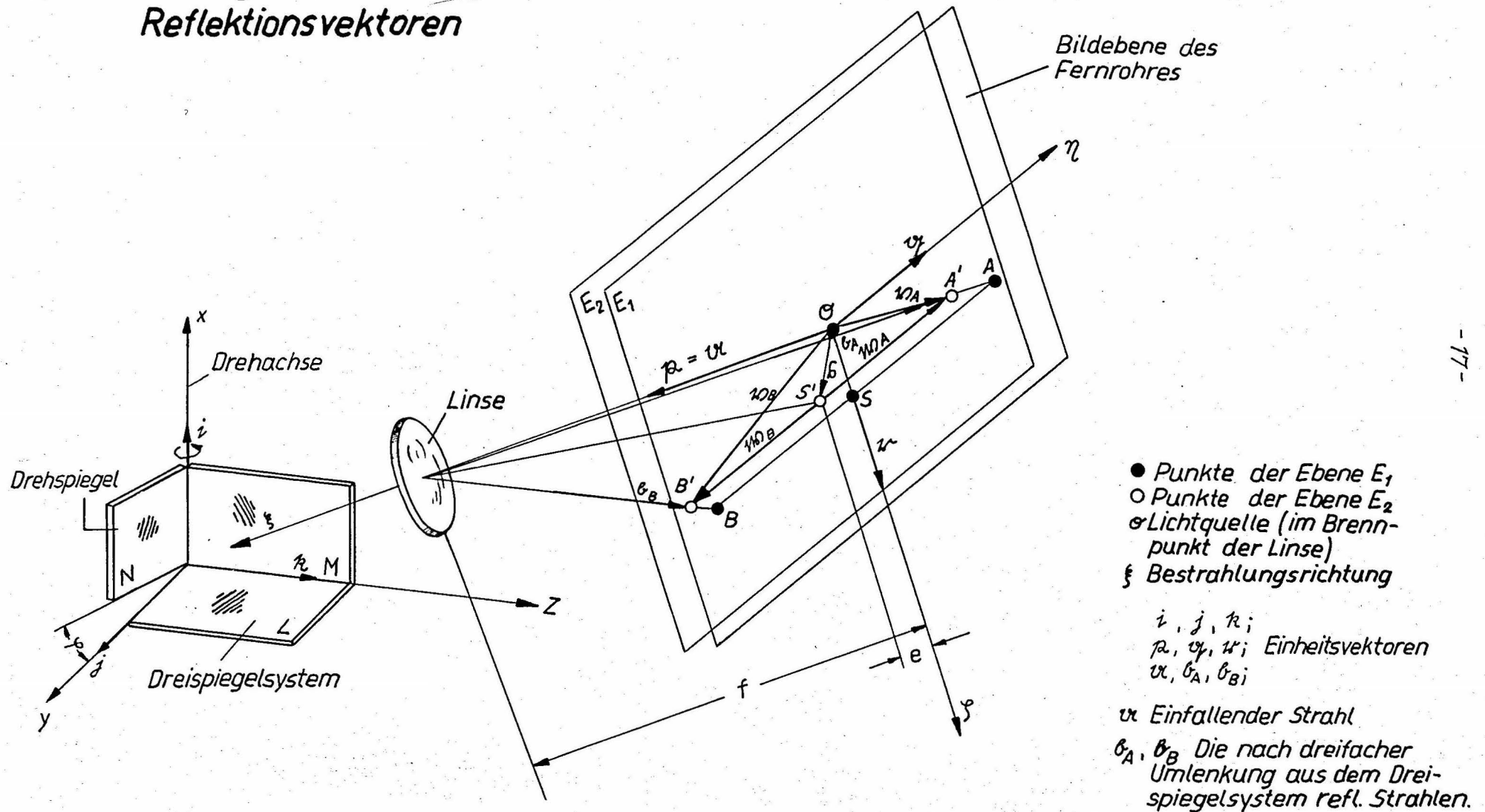
$$\vec{w}_A = -\vec{w}_B = 2\gamma A \{0; 1; 0\} \quad (47)$$

In Abb. 7 ist eine Zusammenstellung aller Darstellungen gegeben. Die Einheitsvektoren für das am Fernrohr orientierte Bezugssystem sind definiert durch die Beziehung (29).

D4 Der Einfluss der Eigenbewegung des Fernrohres auf den Messvorgang

Aus den vorhergehenden Überlegungen für den allgemeinen Fall des aus beliebiger Richtung in das Dreispiegelsystem einfallenden Lichtstrahles $\vec{w}$ ergaben sich unter der zulässigen

Vollständige Darstellung der Reflektionsvektoren



Vernachlässigung für $\varphi \ll 1$ die Orte der Abbildungen in der Bildebene, wie sie durch die Gleichung (47) beschrieben werden.

Nun soll untersucht werden, welchen Einfluss die Eigenbewegung des Fernrohres (Änderung der Einfallrichtung des Lichtes) auf den Abbildungsort hat.

Nach (47) gilt:

$$\overline{w}_A = -\overline{w}_B = 2\varphi A \cdot \{0; 1; 0\}$$

Hierin bedeutet nach (30)

$$A = \sqrt{a_y^2 + a_z^2}$$

oder

$$A = \sin(\varpi i) = \sin \alpha \quad (48)$$

A stellt demnach den sinus des Winkels dar, den der einfallende Lichtstrahl ϖ mit der Drehachse des beweglichen Spiegels (hier x-Achse) bildet. S. Abb. 8.

Bei ruhendem Fernrohr ist A = konstant und damit $\overline{w}_{A,B}$ nur von φ abhängig.

$$\frac{\partial \overline{w}_{A,B}}{\partial \varphi} = \pm 2A \{0; 1; 0\} \quad (49)$$

Eine Bewegung des Fernrohres, bei der A konstant bleibt, hat nach (49) ebenfalls keinen Einfluss auf die Abbildungsorte (47), wird also den Messwert nicht ändern.

Nur eine Bewegung des Fernrohres durch die der Winkel α verändert wird, ruft eine geringe Verschiebung der Abbildungsorte in der Bildebene hervor und könnte somit als scheinbare Bewegung des Spiegels N gedeutet werden. Bei ruhendem Spiegelsystem ($\varphi = \text{konstant}$) ergibt sich für die Änderung des Ortes in der Bildebene mit der Änderung des Winkels α aus (47) und (48):

$$\frac{\partial \overline{w}_{A,B}}{\partial \alpha} = \pm 2\cos \alpha \{0; 1; 0\} \quad (50)$$

Der Einfluss der Eigenbewegung des Fernrohres in dieser speziellen Weise ist $\cos \alpha$ proportional.

Aus (48), (49) und (50) kann eine Abschätzung des Verhältnisses ξ der Einflüsse von Spiegelbewegung und Fernrohrbewegung vorgenommen werden.

$$\xi = \frac{\frac{\partial \overline{w}_{A,B}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \overline{w}_{A,B}}{\partial \varphi}} = \frac{\varphi}{f_{\alpha}} \quad (51)$$

So ergibt sich nach (51) für $\varphi = 1^\circ$ und für $\alpha = 45^\circ$
 $\xi = 0,0174 \hat{=} 1,74\%$. Für $\varphi = 0,5^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ erhält
 man $\xi = 0,005 \hat{=} 0,5\%$. *)

Wird also das Fernrohr so aufgestellt, dass seine Achse mit der Drehachse des Spiegelsystems einen Winkel von 60° (oder mehr) bildet, so ist der Einfluss der Eigenbewegung des Fernrohres bezogen auf eine gleich grosse Bewegung des beweglichen Spiegels im Spiegelsystem geringer als 1 % (oder noch weniger). In Abb. 8 ist eine Messanordnung (Spiegelsystem und Fernrohr) prinzipiell dargestellt. Ohne Einfluss auf den Messvorgang sind alle Bewegungen von Fernrohr und Spiegelsystem (sowohl translatorisch als auch rotatorisch), für die der Winkel α konstant bleibt. Wird durch eine Eigenbewegung der Winkel α geändert, so ergibt sich eine (sehr geringe) Beeinflussung der Messung.

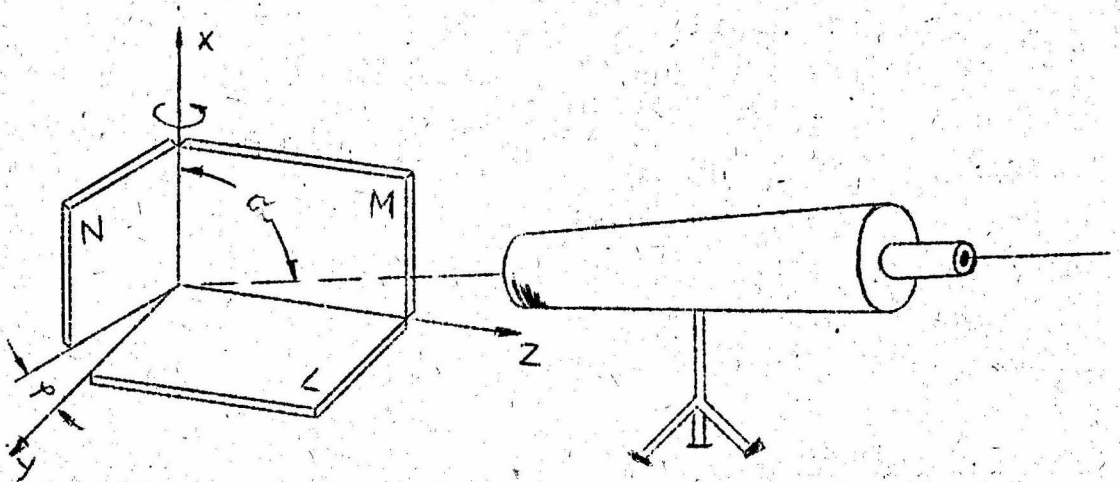


Abb. 8

*) Durch die Veränderung des Winkels verändert sich genau genommen mit den Einheitsvektoren auch die Richtung der Abbildungsorte in der Bildebene. Der Wert ^{für ξ} kann dadurch aber nicht grösser sondern eher kleiner werden und damit günstiger.

D 5 Die Ablesung der Messwerte

Wie in /1/ beschrieben, gestattet dieses Messverfahren neben der Darstellung des Schwingungsvorganges im Oszillographen über die Scala des Messmikroskopes die sofortige Ablesung der Amplitudenhöhe der zu messenden Schwingung. Für den Sonderfall des Zweispiegelsystems stellt der in Teilstrichen abgelesene Wert im Messmikroskop ein direktes Mass für die Verdrehung des Spiegels dar. Im allgemeinen Falle des Dreispiegelsystems ist der abgelesene Wert nach (47) und (48) $\sin \alpha$ proportional. D.h. der im allgemeinen Falle an der Skala des Messmikroskopes abgelesene Wert in Teilstrichen muss durch den Wert $\sin \alpha$ (Abb. 8) dividiert werden und kann dann in der für das Zweispiegelsystem angegebenen Weise /1/ ausgewertet werden.

D6 Der konstruktive Aufbau des Fernrohres

Der Aufbau des Fernrohres und die Durchführung der Messung entspricht vollkommen den in /1/ angegebenen Beschreibungen. Zu beachten ist jedoch grundsätzlich, dass durch den Übergang vom Zwei- zum Dreispiegelsystem die Abbildung in der Bildebene spiegelbildlich erfolgt. (Zahl der Reflektionen). Gegebenenfalls muss dann der Photoempfänger an der entgegengesetzten Seite der optischen Achse des Fernrohres angebracht werden.

Literaturhinweise:

- /1/ R.Hartwig: Ein optisch-photoelektronisches Verfahren zur Messung mechanischer Schwingungen
Techn.Ber. des H.H.I. Nr. 24 (1959)
- /2/ R.Zurmühl: Matrizen
Springer-Verlag (1950)